Curso de cálculo de incertidumbres en ensayos: TEORÍA

EILA17 Cálculo de Incertidumbres

Jesús Caja García (jesus.caja@upm.es)
Piera Maresca (piera.maresca@upm.es)
Dpto. de Ingeniería, Química y Diseño Industrial

Metrología

- **METROLOGIA**, del griego μετρον (medida) y λογος (tratado): Es la ciencia de la medida, comprende todos los aspectos, tanto teóricos como prácticos, que se refieren a las mediciones, cualesquiera que sean sus incertidumbres y en cualesquiera de los campos de la ciencia y de la tecnología en que tengan lugar.

- Cubre tres actividades principales:
  - Definición de las unidades de medida internacionalmente aceptadas.
  - Realización de las unidades de medida por métodos científicos.
  - Establecimiento de las cadenas de trazabilidad, determinando y documentando el valor y exactitud de una medición y diseminando dicho conocimiento (cálculo de incertidumbres)

¿Por qué es necesario estimar la incertidumbre asociada a una medida?

- Permite la comparación de resultados equivalentes de diferentes laboratorios o dentro del mismo laboratorio (distintos métodos, operarios,…) o una comparación de el resultado con valores de referencia (patrones).

- La incertidumbre del resultado de un ensayo debe tenerse en cuenta al interpretar los resultados del mismo.

- En algunos casos, se puede considerar que la incertidumbre de una medida o resultado de un ensayo es pequeño como para no merecer una evaluación formal.

- Los resultados de algunos tipos de ensayo están sujetos a una gran variabilidad. En tal caso podría afirmarse que incluso una incertidumbre relativamente grande que se asocia con el la medición puede ignorarse en comparación con la incertidumbre debida a la variación de la muestra.

¿Por qué es necesario estimar la incertidumbre asociada a una medida?

- Una estimación, de los componentes que contribuyen al conjunto de la incertidumbre de una medida o resultado de ensayo proporciona un medio para establecer que las mediciones realizadas y los resultados obtenidos son válidos.

- La evaluación exhaustiva de los componentes que contribuyen a la incertidumbre de una medición permite conocer los aspectos que influyen en una medición y a cuáles se debe dirigir la atención para mejorar los procedimientos y la precisión de la medición.

¿Por qué es necesario estimar la incertidumbre asociada a una medida?

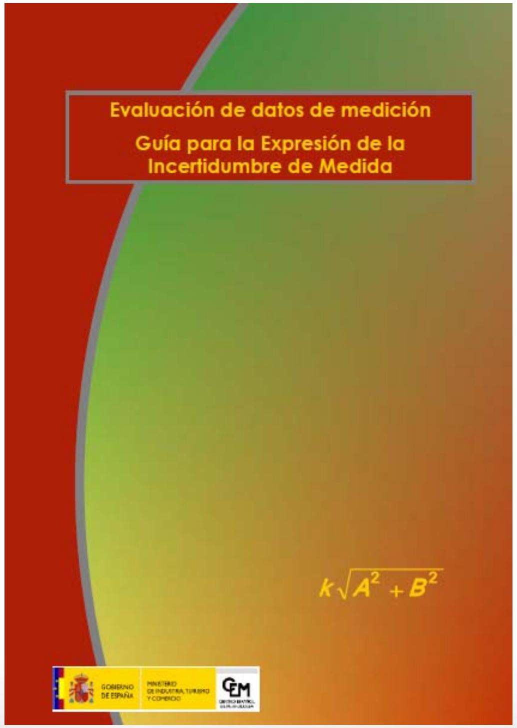
.

- Finalmente, en la norma ISO/IEC 17025:2005 – Requisitos generales para la competencia de los laboratorios de ensayo y calibración, apartado 5.4.6.2 se indica:

> *"Los laboratorios de ensayo deben tener y deben aplicar procedimientos para estimar la incertidumbre de la medición. En algunos casos la naturaleza del método de ensayo puede excluir un cálculo riguroso, metrológicamente y estadísticamente válido, de la incertidumbre de medición. En estos casos el laboratorio debe, por lo menos, tratar de identificar todos los componentes de la incertidumbre y hacer una estimación razonable, y debe asegurarse de que la forma de informar el resultado no dé una impresión equivocada de la incertidumbre. Una estimación razonable se debe basar en un conocimiento del desempeño del método y en el alcance de la medición y debe hacer uso, por ejemplo, de la experiencia adquirida y de los datos de validación anteriores."*

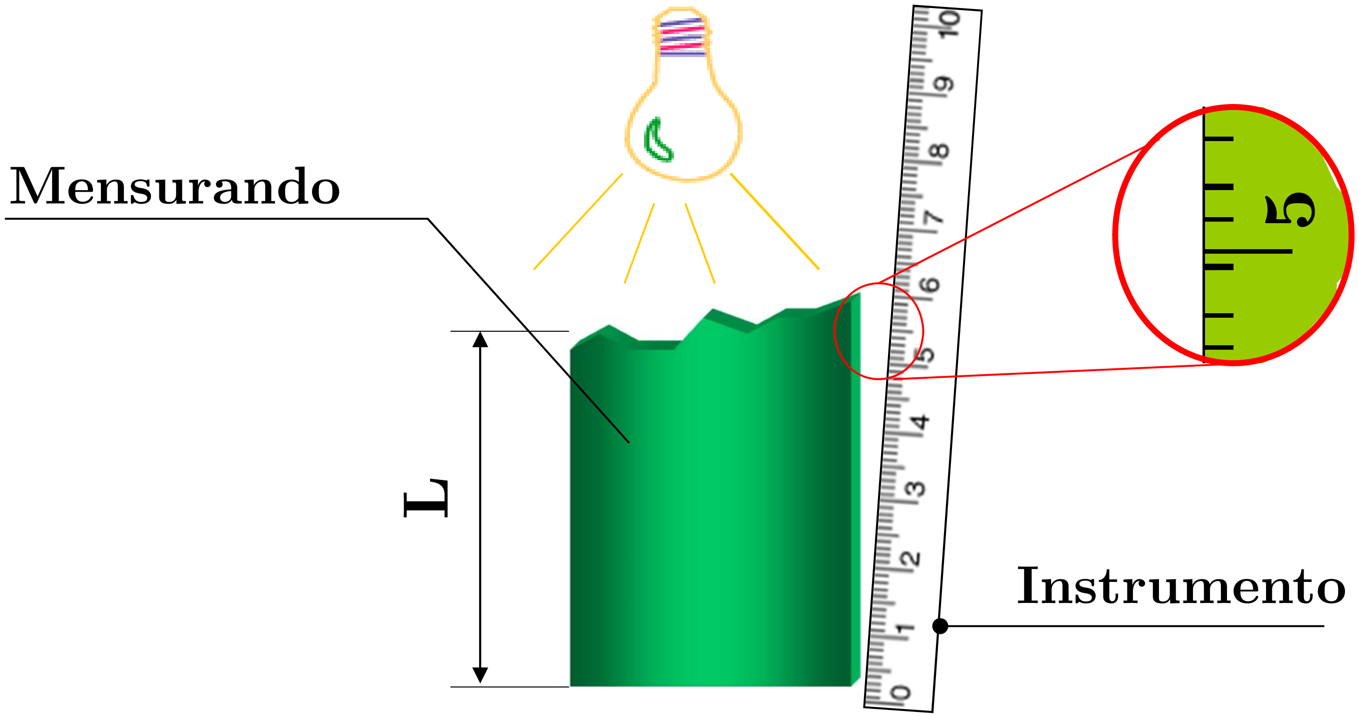
Documento de Referencia

Evaluación de datos de medición. Guía para la Expresión de la Incertidumbre de Medida (JCGM 100:2008)



Enlace Web

Concepto de Incertidumbre



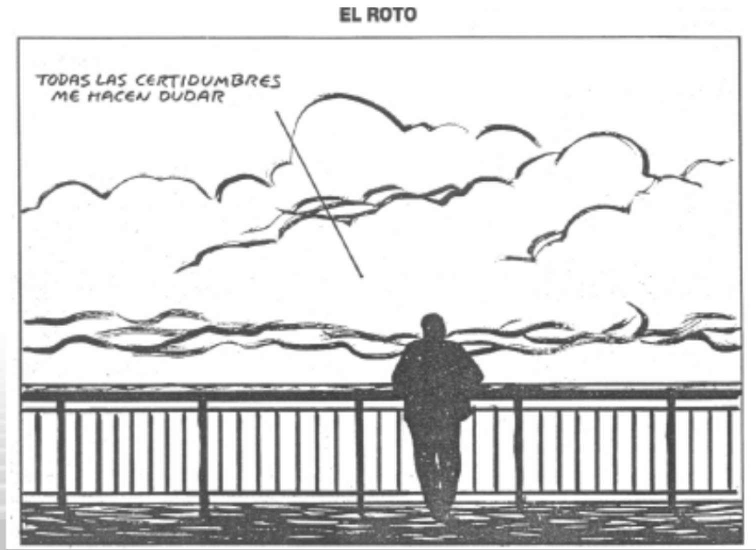
$$L = 57 \pm U \quad mm$$

Concepto de Incertidumbre

.

- La Incertidumbre es una medida cuantitativa de la calidad del resultado de medición, que permite que los resultados de medida sean comparados con otros resultados, referencias, especificaciones o normas.

- **Definición:** parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los valores atribuidos a un mensurando, a partir de la información que se utiliza. (VIM 2012)



Concepto de Trazabilidad

.

- Una cadena de trazabilidad es una cadena ininterrumpida de comparaciones, todas ellas con incertidumbres establecidas. Esto asegura que un resultado de medida o el valor de un patrón está relacionado con referencias de niveles superiores, hasta llegar al patrón primario.

- Un usuario final puede obtener trazabilidad al máximo nivel internacional, bien directamente de un Instituto Nacional de Metrología, o de un laboratorio secundario de calibración, normalmente un laboratorio acreditado. Como resultado de los diversos acuerdos de reconocimiento mutuo, puede obtenerse reconocimiento internacional de la trazabilidad de laboratorios de fuera del propio país del usuario

Concepto de Trazabilidad

Definición de la Unidad

↓

Patrones Primarios

↓

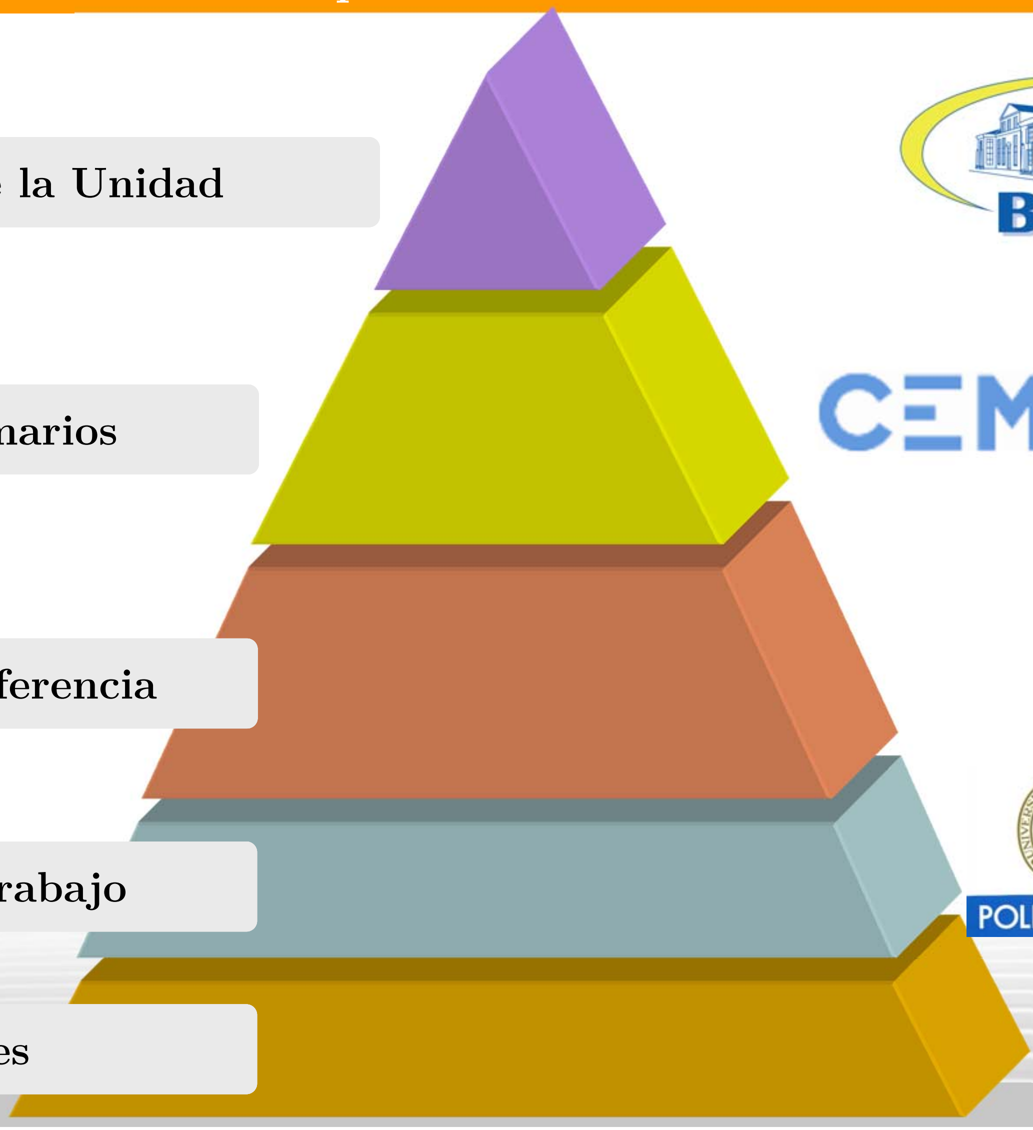
Patrones de Referencia

↓

Patrones de Trabajo

↓

Mediciones



BIPM

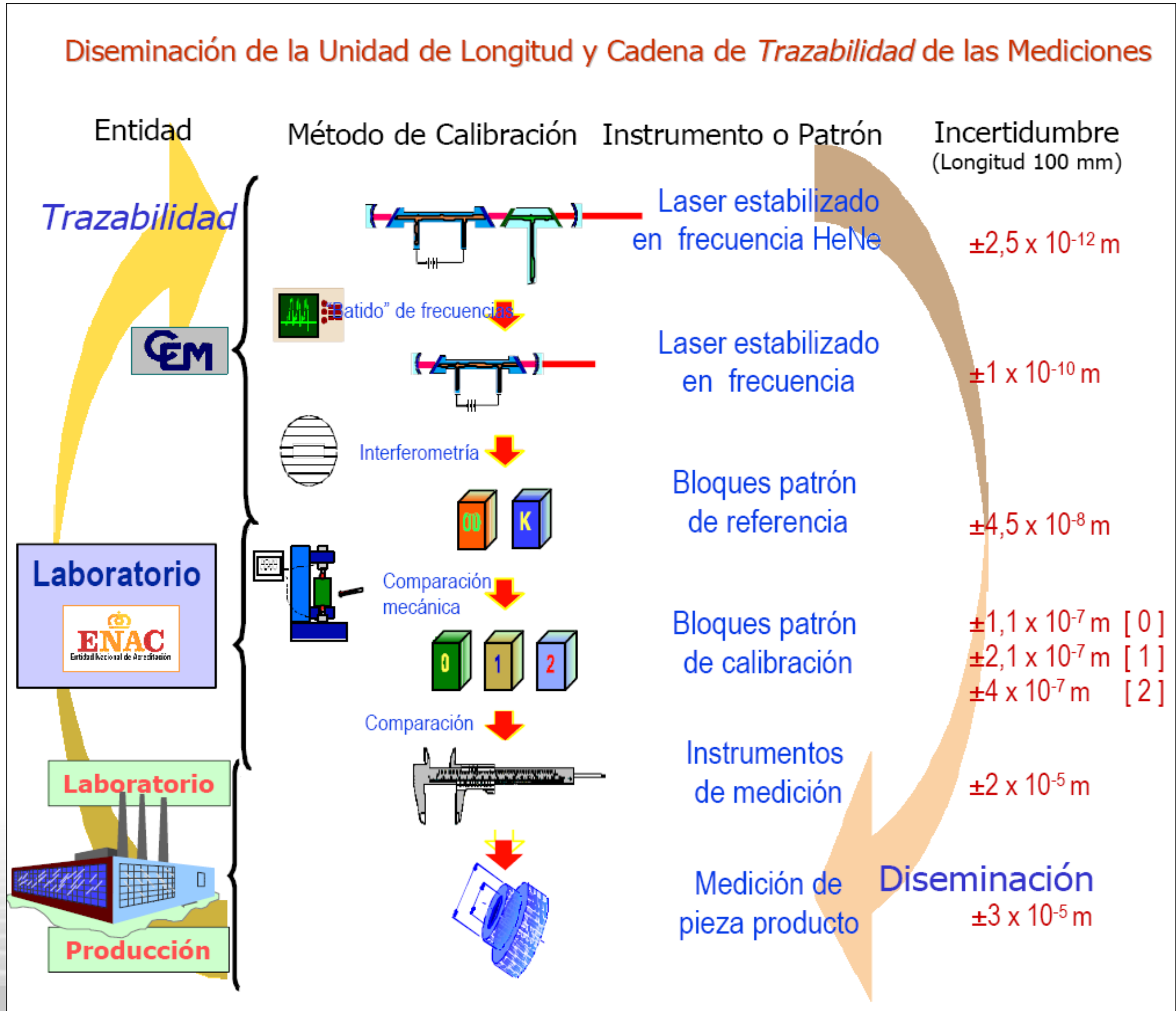
CEM CENTRO ESPAÑOL DE METROLOGÍA

ENAC Entidad Nacional de Acreditación

POLITÉCNICA

BOSCH

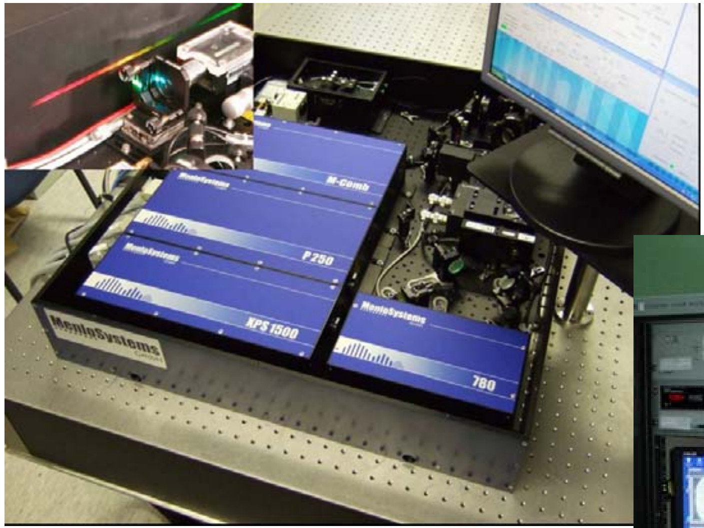
Concepto de Trazabilidad

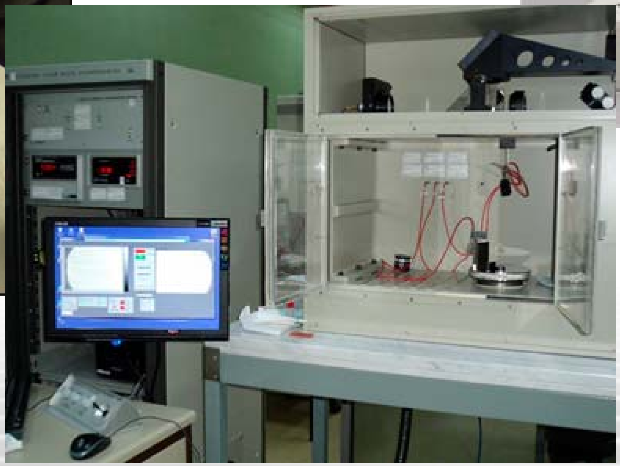


Patrón de Medida

.

- Un patrón de medida es una medida materializada, un instrumento de medida, un material de referencia o un sistema de medida concebido para definir, realizar, conservar o reproducir una unidad o uno o más valores de una magnitud, de modo que sirva de referencia .

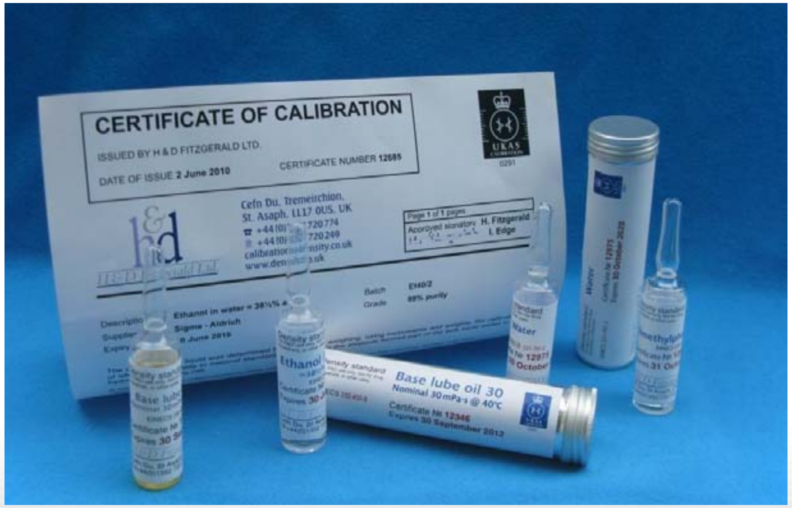




Material de Referencia

.

- Un Material de Referencia Certificado (MRC) es un material de referencia donde una o más de sus propiedades están certificadas por un procedimiento que establece su trazabilidad a una realización de la unidad en la que se expresan los valores de la propiedad. Cada valor certificado viene acompañado de su incertidumbre para un nivel declarado de confianza.



Trazabilidad y Calibración

.

- Una herramienta fundamental para asegurar la trazabilidad de una medida es la calibración del instrumento o sistema de medida o del material de referencia. La calibración determina las características metrológicas de un instrumento, sistema o material de referencia. Esto se logra mediante comparación directa con patrones de medida o materiales de referencia certificados. Se emite un certificado de calibración y, en la mayoría de los casos, se adhiere una etiqueta al instrumento calibrado.

ENAC CALIBRACIÓN
Nº 11/LC032

CERTIFICADO DE CALIBRACIÓN
Certificate of Calibration

Número *Number* 7315

Página *Page* 1 De *of* 3 páginas *pages*

LABORATORIO DE METROLOGÍA DIMENSIONAL
Centro de Prevención y Rehabilitación
Servicio de Readaptación Profesional.
Carretera de Pozuelo, nº 61
28220 - Majadahonda. Madrid - España.
Tfno.: 91 626 57 72/65 - Fax: 91 626 59 36

FREMAP *Mutua de Accidentes de Trabajo y Enfermedades Profesionales de la Seguridad Social Número 61*

OBJETO *Item* PATRÓN CILÍNDRICO DE DIÁMETRO INTERIOR
MARCA *Mark* TESA
MODELO *Model* 50
IDENTIFICACIÓN *Identification* LMD-UPM/001 // LU 640
SOLICITANTE *Applicant* EUITI-UPM
C/ Ronda de Valencia, 3

FREMAP Lab. de Metrología Dimensional Nº 11 — ENAC
EQUIPO: Patrón cilin. diám. int.
Nº SERIE: LMD-UPM/001 // LU 640
Nº CERTIFICADO: 7315 FECHA: 30 / 05 / 2006

FREMAP

ENAC CALIBRACIÓN

CERTIFICADO DE CALIBRACION
Nº 11/LC032 / 7315 / Página 3 de 3

6.- RESULTADOS

A Temperatura de referencia 20 ± 1°C, con factor de incertidumbre k=2.

TABLA DE RESULTADOS

en mm

IDENTIFICACIÓN			RESULTADOS		
Marca	Identificación	Nominal	Valor Efectivo	∆ F	U (k=2)
TESA	LMD-UPM/001	50,0000	50,00983	0,0006	0,0022
***	***				
***	***				
***	***				
***	***				
***	***				
***	***				
***	***				
***	***				
***	***				
***	***				

Trazabilidad y Calibración

.

Hay cuatro razones principales para tener calibrado un instrumento:

- Para establecer y demostrar su trazabilidad (Apartado 5.6.1 ISO/IEC 17025:2005).
- Para garantizar que las lecturas del instrumento son compatibles con otras mediciones.
- Para determinar la exactitud de las lecturas del instrumento.
- Para establecer la fiabilidad del instrumento, es decir que se puede confiar en sus indicaciones.

Algunos conceptos metrológicos

Medición

Objetivo de una medición es:

- Determinar el valor de un mensurando.
- Valor de la magnitud particular bajo medición.

Una medición debe contemplar:

- Definición del mensurando.
- Procedimiento de medida (descripción detallada de una medición conforme a uno o más principios de medida y a un método de medida dado, basado en un modelo de medida y que incluye los cálculos necesarios para obtener un resultado de medida).
- Sistema de medida (calibrado conforme a un procedimiento de medida especificado).

Algunos conceptos metrológicos

Resultado de una Medición

- Es sólo una aproximación o estimación
- Sólo se halla completo cuando esta acompañado de una declaración acerca de su incertidumbre
- Determinado a partir de una serie de observaciones obtenidas en condiciones de repetibilidad.
- Variación entre observaciones repetidas → Magnitudes de influencia.

Algunos conceptos metrológicos

Repetibilidad

- Condición de medición, dentro de un conjunto de condiciones que incluye el **mismo procedimiento de medida**, los **mismos operadores**, el **mismo sistema de medida**, las **mismas condiciones de operación** y el **mismo lugar**, así como **mediciones repetidas del mismo objeto o de un objeto similar** en un **periodo corto de tiempo**

Magnitud de influencia

- Magnitud que, en una medición directa, no afecta a la magnitud que realmente se está midiendo, pero sí afecta a la relación entre la indicación y el resultado de medida.

Algunos conceptos metrológicos

Condiciones de Referencia

- Las condiciones de referencia especifican intervalos de valores del mensurando y de las magnitudes de influencia.
- Permiten evaluar las prestaciones de un instrumento o sistema de medida o para comparar resultados de medida
- <u>**EJEMPLO**</u>: La medidas eléctricas deben referirse a 23 °C.
  La humedad ambiente debe estar comprendida entre 50±10%

Algunos conceptos metrológicos

Condiciones de Referencia

- Longitud varilla acero 1 m en el rango de temperatura de (20 ± 5) °C
- ¿Afecta la temperatura sí mi instrumento es capaza de apreciar?
    - 1 mm – 1 mm
    - 0,01 mm – 0,01 mm

Algunos conceptos metrológicos

Indicación

- Valor proporcionado por un instrumento o sistema de medida

Sensibilidad de un sistema de medida

- Cociente entre la variación de una indicación de un sistema de medida y la variación correspondiente del valor de la magnitud medida

Resolución

- Mínima variación de la magnitud medida que da lugar a una variación perceptible de la indicación correspondiente

Algunos conceptos metrológicos

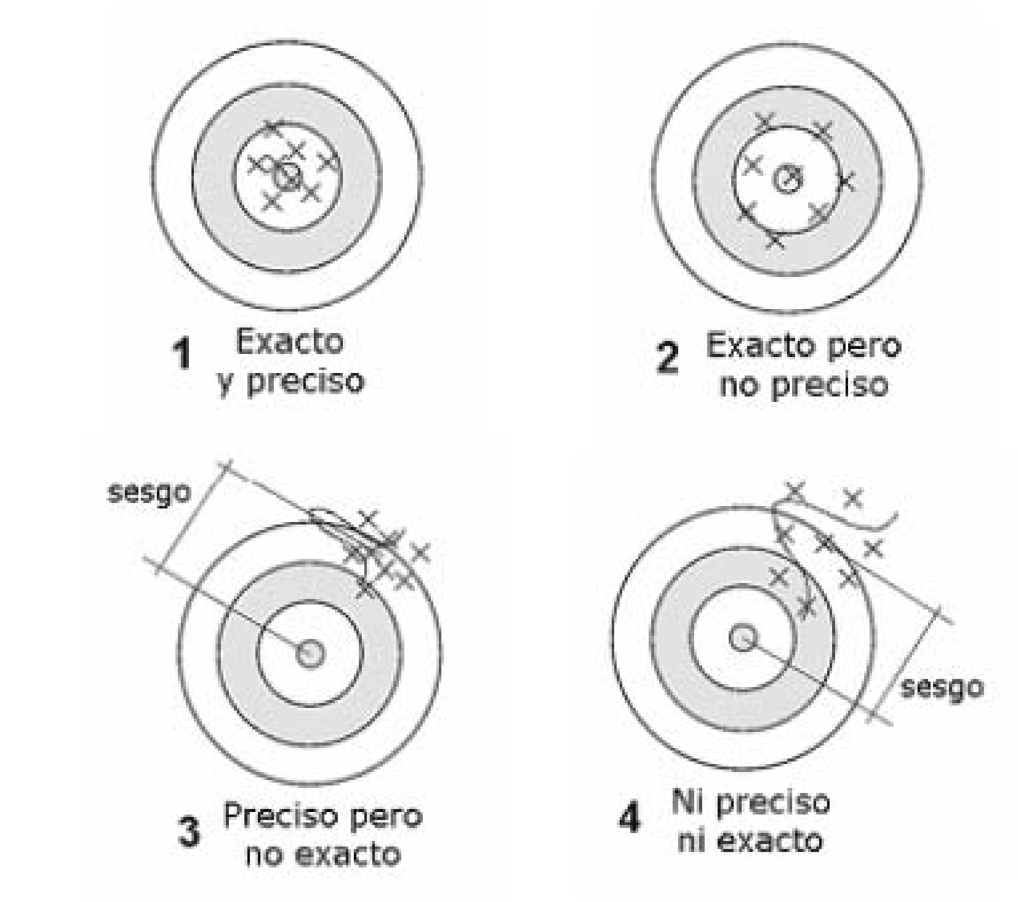
Exactitud de medida

- Proximidad entre un valor medido y un valor verdadero de un mensurando

Precisión de medida

- Proximidad entre las indicaciones o los valores medidos obtenidos en mediciones repetidas de un mismo objeto, o de objetos similares, bajo condiciones especificadas. (dispersión)

Algunos conceptos metrológicos



Modelo matemático de la medición (función de medición)

- **Debe:**
  - Transformar la serie de observaciones repetidas en el resultado de medida (magnitud de salida)

- **Incluye:**
  - Observaciones (variaciones)
  - Magnitudes de influencia (no conocidas con exactitud)
  - Otras magnitudes de entradas (correcciones,...)

$$y = f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\right)$$

Incertidumbre

Errores, efectos y correcciones

- **En una medición:**
  - Imperfecciones → Errores en el resultado de la medida.
- **Los errores constan de dos componentes:**
  - Aleatorio
  - Sistemática

Errores, efectos y correcciones

- **Error aleatorio**
  - Debido a: variaciones en las magnitudes de influencia.
  - Efecto: variaciones en las observaciones.
  - Imposible de compensar.
  - Esperanza matemática igual a cero.

- **Error sistemático**
  - Debido a: Efecto identificado de una magnitud de influencia.
  - Por lo tanto cuantificable.
  - No puede eliminarse → pero puede ser reducido.
  - Aplicación de corrección o factor de corrección.
  - Tras la corrección: Esperanza matemática igual a cero.

Corrección de las medidas

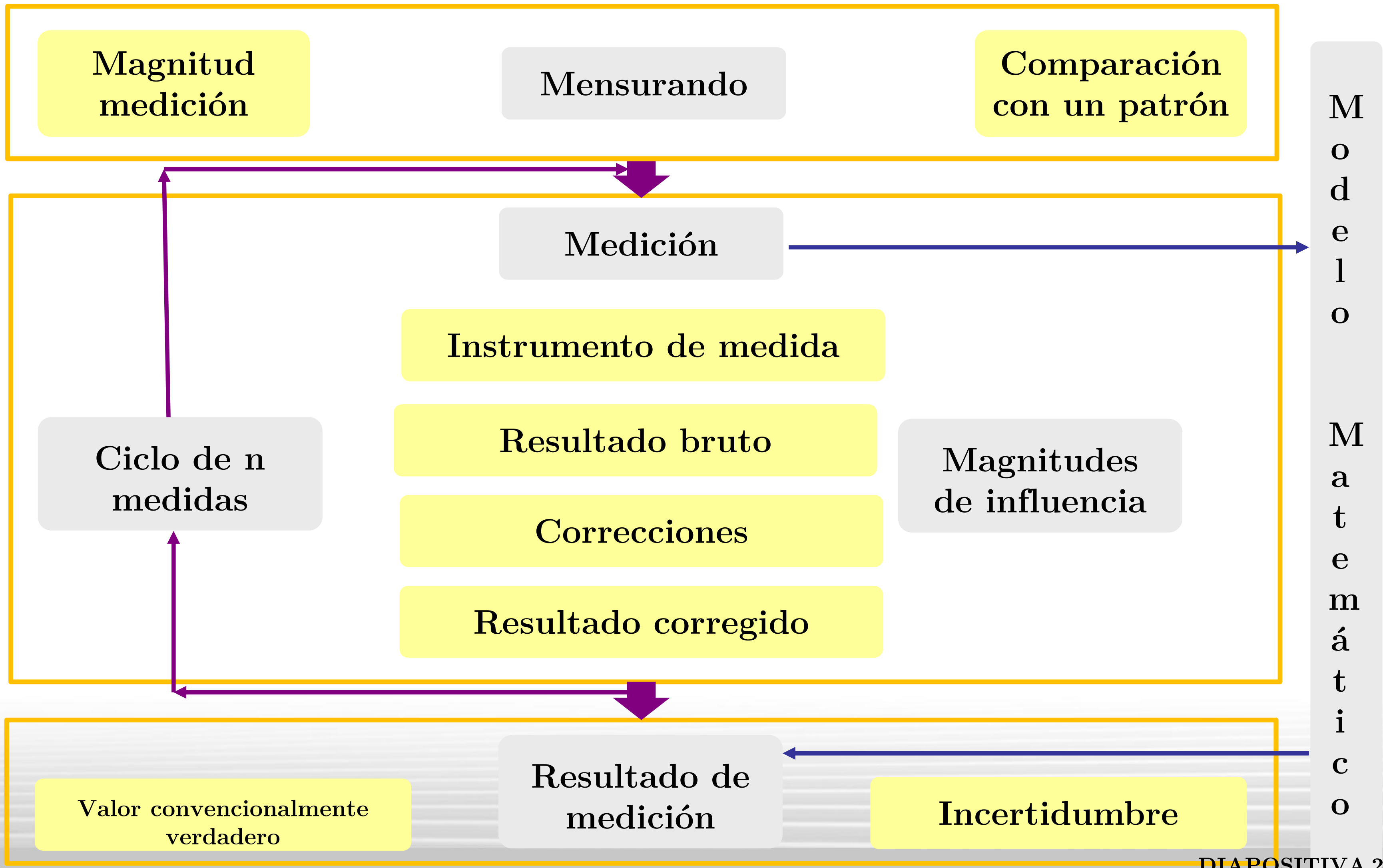
- **Incrementan la complejidad del modelo de medición**
- **Supone efectuar medidas adicionales**
- **Ejemplo:**
  - Lectura directa de un instrumento.
  - Medida indirecta de un instrumento.
  - Determinación de una masa por comparación con una masa patrón.

Valor "verdadero" y valor corregido

- **Resultado corregido →Mejor estimación del valor verdadero**

- **Resultado de la medida corregida no es el valor del mensurando**
  - Errores debidos a imperfecciones en la medición
  - Variaciones aleatorias de las observaciones
  - Determinación inadecuada de las correcciones
  - Conocimiento incompleto de ciertos fenómenos físicos

Resumen - Concepto de Cadena de Medición



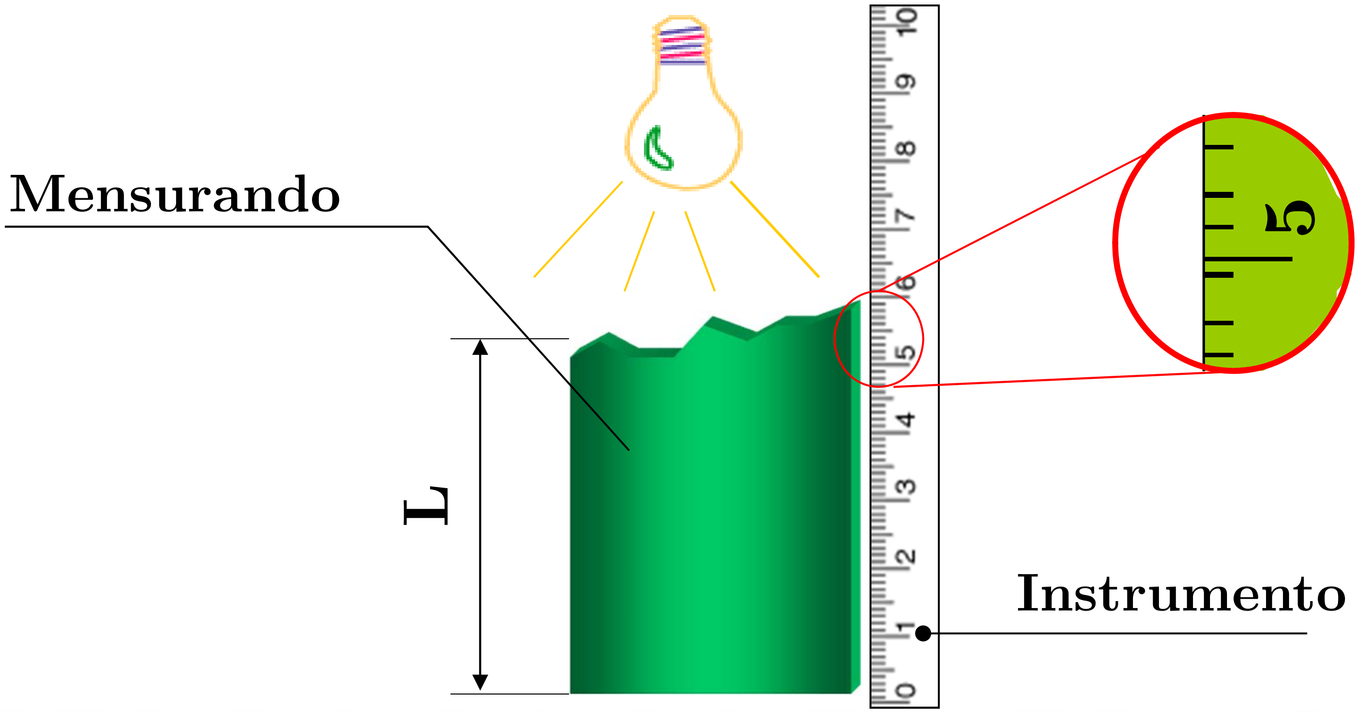
Concepto de Incertidumbre

- La incertidumbre del resultado de una medición refleja la imposibilidad de conocer exactamente el valor del mensurando. Este resultado, incluso con todas las correcciones por efectos sistemáticos, es tan sólo una estimación del valor "real" del mensurando

- **Fuentes de Incertidumbre:**
  - Definición incompleta del mensurando.
  - Realización imperfecta de la definición del mensurando.
  - Muestra no representativa.
  - Condiciones ambientales.
  - Instrumento de medida (lectura, resolución, calibración,…).
  - Valores inexactos de los patrones o MR.
  - Valores inexactos de constantes y parámetros.
  - Hipótesis establecidas en el método o procedimiento.
  - Variaciones de las observaciones en condiciones idénticas.
  - Otras causas…..

Estas fuentes no son independientes unas de otras

Concepto de Incertidumbre



Incertidumbre típica de las variables de entrada

- Se denomina **incertidumbre típica** de una cierta variable a la desviación típica asociada a la misma, es decir, la incertidumbre típica es la incertidumbre correspondiente a **una** desviación típica.

- La evaluación de la incertidumbre típica de las magnitudes de entrada se efectúa mediante

    - **Evaluación tipo A.**
    - **Evaluación tipo B.**

Clasificación de componentes de la incertidumbre

Evaluación Tipo A

- Carácter objetivo.
- Análisis estadístico.
- Calculada a partir de la varianza s^2 de n observaciones.

Evaluación Tipo B

- Carácter subjetivo.
- Función de probabilidad asumida.
- Varianza u^2 evaluada a priori.

Evaluación de Incertidumbre de tipo A

Variable aleatoria X → N observaciones independientes x_i, obtenidas en condiciones de repetibilidad

El mejor estimador del valor verdadero de X es la media muestral de las observaciones x_i:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

El mejor estimador de la desviación típica poblacional es la desviación típica muestral

$$S(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{N-1}}$$

El mejor estimador de la desviación típica muestral de la media es

$$u(x_i) = S\left(\overline{X}\right) = \frac{S(x_i)}{\sqrt{N}}$$

Evaluación de Incertidumbre de tipo A

$$u(x_i) = \frac{S(x_i)}{\sqrt{N}}$$

- N debe tener un tamaño adecuado: grados de libertad $\upsilon = N - 1$
- Es una información importante para estimar la fiabilidad de la evaluación de dicha desviación típica y debe tenerse en cuenta que siempre debería ser $N \geq 10$
- Si $N < 5$ una solución es usar la distribución t-student

$$u(x_i) = t_p(\upsilon)\frac{S(x_i)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\upsilon}{\upsilon - 2}}\,\frac{S(x_i)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{N-1}{N-3}}\,\frac{S(x_i)}{\sqrt{N}}$$

Evaluación de Incertidumbre de tipo A -Ejemplo

- A continuación se muestran los resultados de un ensayo de dureza Rockwell (10 identaciones):

- 45,4 45,5 45,4 45,3 45,5 HRC.

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 45,42 \text{ HRC}$$

$$S\left(x_i\right) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{N-1}} = 0,0816 \text{ HRC}$$

$$u\left(x_i\right) = \frac{S\left(x_i\right)}{\sqrt{N}} = \frac{0,0816}{\sqrt{5}} = 0,0365 \text{ HRC}$$

Evaluación de Incertidumbre de tipo A -Ejemplo

- A continuación se muestran los resultados de un ensayo de dureza Rockwell (10 identaciones):

- 45,4 45,5 45,4 45,3 45,5 HRC.

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 45,42 \text{ HRC}$$

$$S(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{N-1}} = 0,0816 \text{ HRC}$$

41,4 %

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{N-1}{N-3}}\frac{S(x_i)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{5-1}{5-3}}\frac{0,0816}{\sqrt{5}} = 0,0516 \text{ HRC}$$

Evaluación de Incertidumbre de tipo B

- **No basada en el análisis estadístico de las observaciones.**

- **Evaluada por:**
  - Resultados de medidas previas.
  - La experiencia o el conocimiento general del comportamiento y propiedades de los instrumentos y materiales utilizados.
  - Especificaciones fiables de los fabricantes.
  - Datos de calibraciones y certificados.
  - Incertidumbre asignada a valores de referencia procedentes de libros y manuales técnicos de solvencia.
  - Hipótesis sobre la clase de función de densidad de la variable $X_{i.}$

Evaluación de Incertidumbre de tipo B - Ejemplo

- El coeficiente de dilatación lineal del cobre puro a 20°C es $\alpha = 16{,}5 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$.

  Se considera que la información es suficientemente fiable, y se toma como incertidumbre típica el valor de la última cifra significativa, $u(\alpha)=0{,}1 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$.

- En una medición bien diseñada y bajo control estadístico, puede existir una estimación de la varianza s_p^2 que la caracterice. En tal caso, cuando se determina el valor de un mensurando q a partir n observaciones independientes, la varianza experimental de la media aritmética de las observaciones resulta estimado por:

$$u^2\left(\bar{q}\right) = S^2\left(\bar{q}\right) = \frac{s_p^{\,2}}{n}$$

Evaluación de Incertidumbre de tipo B - Ejemplo

- Se sabe que la desviación típica poblacional de una determinada cota es $s_p = 73$ µm.

- Calcule la incertidumbre típica de la cota al efectuar n medidas simples, asimismo, determinar los grados de libertad de dicha variable, cuando:
  - n = 1
  - n = 5

$$u(c) = \frac{s_p}{\sqrt{n}} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \quad \rightarrow \quad u(c) = \dfrac{73}{\sqrt{1}} = 73\ \mu\text{m} \quad \nu = \\ n = 5 \quad \rightarrow \quad u(c) = \dfrac{73}{\sqrt{5}} = 32{,}64\ \mu\text{m} \quad \nu = \end{cases}$$

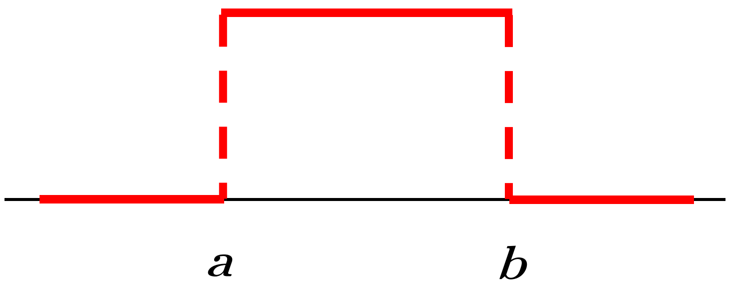
Evaluación de Incertidumbre de tipo B

- Si el mensurando responde a una distribución de probabilidad, la estimación del mismo es la media de dicha distribución y su desviación típica es la incertidumbre típica asociada.

- **Distribuciones:**
  - Uniforme o Rectangular
  - Uniforme con límites inexactos
  - Trapezoidal
  - Triangular
  - Arco seno
  - Normal
  - t-student

Evaluación de tipo B. Distribución rectangular o uniforme

- Si la única información disponible en relación con una magnitud X es un límite inferior a y un límite superior b, con $a < b$, entonces, de acuerdo con el principio de máxima entropía, se asignaría a X una distribución rectangular R$(a,\ b)$ en el intervalo $[a,\ b]$.



- La esperanza matemática y la incertidumbre típica de X son:

$$E\left(X\right) = \frac{a+b}{2} \qquad u\left(X\right) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Evaluación de tipo B. Distribución rectangular o uniforme

- La temperatura de la sala donde se efectúan las medidas de una probeta se encuentra entre 18,5 $^\circ$C y 23,5 $^\circ$C . Por análisis previos, se sabe que la distribución de dicha temperatura responde a una distribución uniforme.

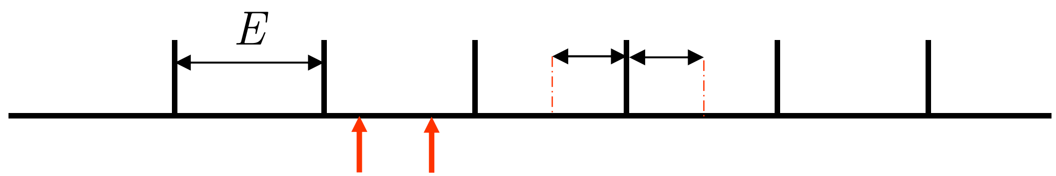
- Calcular el valor, θ_m, y la desviación típica, $u(\theta_m)$ de dicha temperatura.

$$E\left(\boldsymbol{\theta}_m\right) = \frac{a+b}{2} = \frac{23,5+18,5}{2} = 21\ °\mathrm{C}$$

$$u\left(\boldsymbol{\theta}_m\right) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{23,5-18,5}{\sqrt{12}} = 1,44\ °\mathrm{C}$$

Evaluación de tipo B. Distribución rectangular o uniforme

- Discretización de las lecturas de un instrumento de división de escala E (error por división de escala)

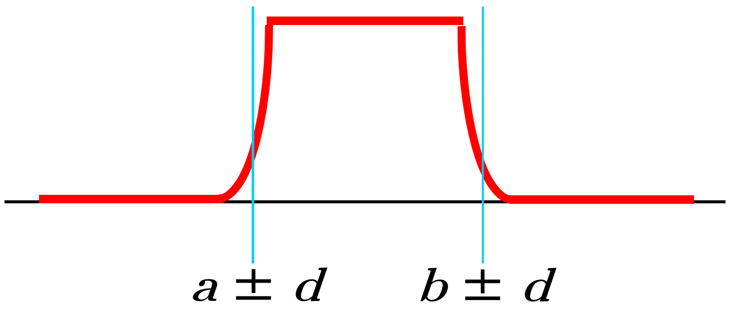


$$E\left(\delta_E\right) = \frac{-E/2 + E/2}{2} = 0$$

$$u\left(\delta_E\right) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{E/2 - -E/2}{2\sqrt{3}} = \frac{E}{2\sqrt{3}}$$

Evaluación de tipo B. Distribución rectangular con límites inexactos

- Si la única información disponible en relación con una magnitud X es un límite inferior $a \pm d$ y un límite superior $b \pm d$, siendo $d > 0$ y $a + d < b - d$, entonces, de acuerdo con el principio de máxima entropía, se asignaría a X una distribución rectangular con límites inexactos CTrap(a, b, d).



- La esperanza matemática y la incertidumbre típica de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad u(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12} + \frac{d^2}{9}}$$

Evaluación de tipo B. Distribución rectangular con límites inexactos

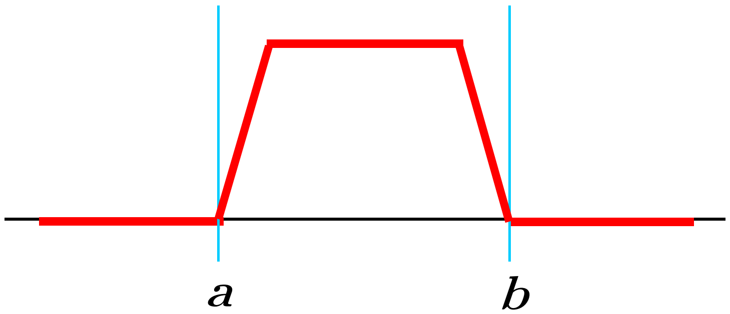
- En un certificado se establece que una tensión X se encuentra en el intervalo 10,0 ± 0,1 V. No se dispone de información adicional sobre X, excepto que se cree que los valores de los extremos del intervalo son el resultado del redondeo correcto de algún valor numérico.
- Sobre esta base, ese valor numérico se encuentra entre 0,05 y 0,15 V, ya que el valor numérico de cada punto en el intervalo (0,05, 0,15) redondeado a una cifra decimal significativa es 0,1.

$$E\left(X\right) = \frac{a+b}{2} = \frac{9,9+10,1}{2} = 10 \text{ V}$$

$$u\left(X\right) = \sqrt{\frac{\left(b-a\right)^2}{12} + \frac{d^2}{9}} = \sqrt{\frac{\left(10,1-9,9\right)^2}{12} + \frac{0,05^2}{9}} = 0,06 \quad \text{V}$$

Evaluación de tipo B. Distribución trapezoidal

- Suponiendo que una magnitud X se define como la suma de dos magnitudes independientes X_1 y X_2 y que para i=1 e i=2, se asigna a las Xi una distribución rectangular R(a_i, b_i) con límite inferior a_i y un límite superior bi, entonces, la distribución de X es una trapezoidal simétrica Trap(a, b, β), con un límite inferior a, un límite superior b y un parámetro b igual a la relación entre la semiamplitud de la parte superior del trapecio y la de la base



$$a = a_1 + a_2 \qquad b = b_1 + b_2 \qquad \beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\left|\left(b_1 - a_1\right) - \left(b_2 - a_2\right)\right|}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{\left|b - a\right|}{2}$$

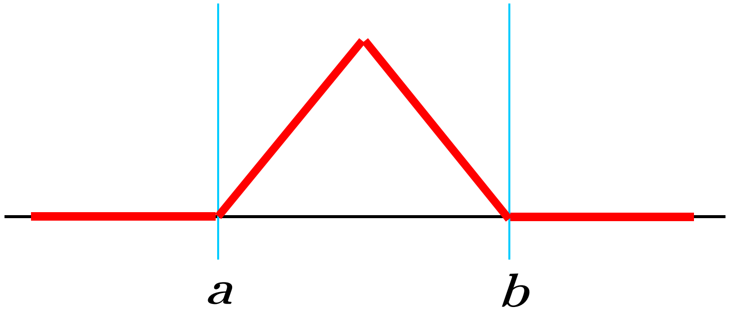
$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$$

- La esperanza matemática y la incertidumbre típica de X son:

$$E\left(X\right) = \frac{a+b}{2} \qquad u\left(X\right) = \sqrt{\frac{\left(b-a\right)^2}{24}\left(1+\beta^2\right)}$$

Evaluación de tipo B. Distribución triangular

- Supóngase que una magnitud X se define como la suma de dos magnitudes independientes, a las que se les asigna una distribución rectangular $\mathrm{R}(a,\ b)$ con la misma semiamplitud, es decir, $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ entonces, la distribución de X es una triangular simétrica $\mathrm{T}(a,\ b)$ en el intervalo $[a,\ b]$



- La esperanza matemática y la incertidumbre típica de X son:

$$E\left(X\right) = \frac{a+b}{2} \qquad u\left(X\right) = \frac{b-a}{\sqrt{24}}$$

Evaluación de tipo B. Distribución triangular

- La temperatura de la sala donde se efectúan las medidas de una probeta se encuentra entre 18,5 °C y 23,5 °C . Por análisis previos, se sabe que la distribución de dicha temperatura responde a una distribución triangular.

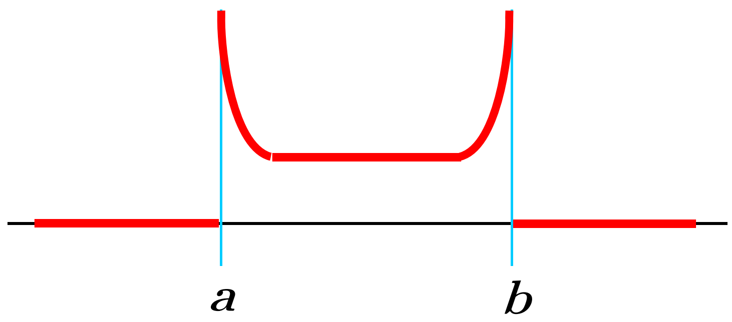
- Calcular el valor, θ_m, y la desviación típica, $u(\theta_m)$ de dicha temperatura.

$$E\left(\boldsymbol{\theta}_m\right) = \frac{a+b}{2} = \frac{23,5+18,5}{2} = 21\ °\mathrm{C}$$

$$u\left(\boldsymbol{\theta}_m\right) = \frac{b-a}{\sqrt{24}} = \frac{23,5-18,5}{\sqrt{24}} = 1,02\ °\mathrm{C}$$

Evaluación de tipo B. Distribución arco seno (en forma de U)

- Si se sabe que una magnitud X tiene un ciclo sinusoidal, con fase desconocida ϕ, entre los límites a y b especificados, entonces de acuerdo con el principio de máxima entropía, se le asignaría a ϕ la una distribución rectangular $\mathrm{R}(0,\ 2\pi)$. La distribución asignada a X es la distribución arco seno $\mathrm{U}(a,\ b)$



- La esperanza matemática y la incertidumbre típica de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad u(X) = \frac{b-a}{\sqrt{8}}$$

Evaluación de tipo B. Distribución arco seno (en forma de U)

- La temperatura de la sala donde se efectúan las medidas de una probeta se encuentra entre 18,5 °C y 23,5 °C . Por análisis previos, se sabe que la distribución de dicha temperatura responde a una distribución arco seno.

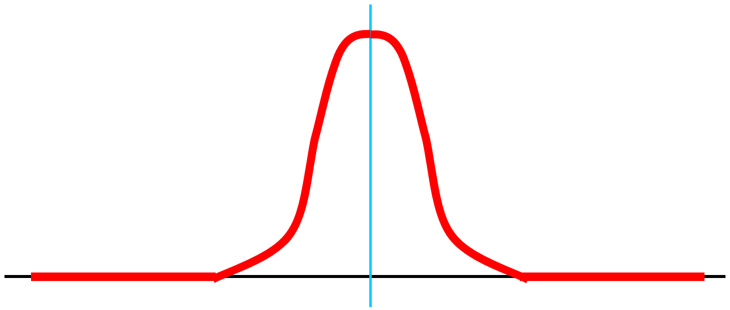
- Calcular el valor, θ_m, y la desviación típica, $u(\theta_m)$ de dicha temperatura.

$$E\left(\theta_m\right) = \frac{a+b}{2} = \frac{23,5+18,5}{2} = 21\ °\mathrm{C}$$

$$u\left(\theta_m\right) = \frac{b-a}{\sqrt{8}} = \frac{23,5-18,5}{\sqrt{8}} = 1,77\ °\mathrm{C}$$

Evaluación de tipo B. Distribución normal

- Si la única información disponible sobre una magnitud X es la mejor estimación x con una incertidumbre típica asociada $u(x)$, de acuerdo con el principio de máxima entropía, se le asignaría a X una distribución de probabilidad gaussiana $\mathrm{N}(x,\, u^2(x))$.

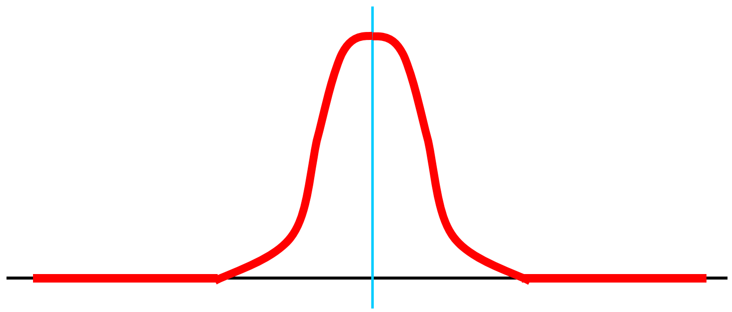


- La esperanza matemática y la incertidumbre típica de X son:

$$E(X) = x \qquad u(x) = \frac{U(x)}{k}$$

Evaluación de tipo B. Distribución normal

- Si la única información disponible en relación con una magnitud X es que responde a una distribución normal y se conocen el límite inferior a y un límite superior b, con $a < b$, límites que definen un intervalo con un 99,73 por ciento, en lugar de con un 100 por ciento.



- La esperanza matemática y la incertidumbre típica de X son:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad u(X) = \frac{b-a}{\sqrt{36}}$$

Evaluación de tipo B. Distribución t-student

- Si la fuente de información acerca de una magnitud X es un certificado de calibración que establece su mejor estimación x, la incertidumbre expandida U, el factor de cobertura k y los grados efectivos de libertad ν_{ef}, entonces debe asignarse a X una distribución $\mathrm{t} = \mathrm{t}_{\mathrm{v}}(x, (U/k)^2)$ con $n = \nu_{ef}$ grados de libertad.

$$E(X) = x \qquad\qquad u(X) = \sqrt{\frac{v_{ef}}{v_{ef} - 2}}\,\frac{U}{k}$$

- Si ν_{ef} se considera infinita o no se especifica, en cuyo caso se tomaría como infinito en ausencia de otra información, se asignará a X una distribución gaussiana $\mathrm{N}(x, (U/k)^2)$

Ley de propagación de la Incertidumbre

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right)$$

Componentes x_i independientes

Magnitudes de entrada no correladas

$$u_c^2\left(y\right) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot u^2\left(x_i\right)$$

Varianza típica combinada

Coeficientes de sensibilidad

Incertidumbre típica

La L.P.V. está basada en un desarrollo en serie de Taylor de primer orden.

Si la función modelo no es lineal, puede ser necesario tomar términos de orden superior

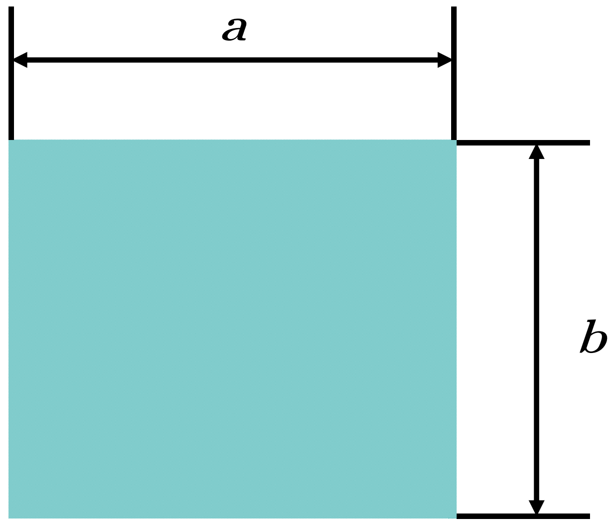
Ley de propagación de la Incertidumbre

- Cuando la no linealidad de f resulta significativa, es necesario incluir términos de orden más elevado en el desarrollo en serie de Taylor para la expresión de $u_c^2(y)$.

- Cuando la distribución de cada X_i es simétrica alrededor de su media, los términos más importantes de orden inmediatamente superior que deben ser añadidos a los términos de la ecuación anterior son:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right] u^2\left(x_i\right)\cdot u^2\left(x_j\right)$$

Ley de propagación de la Incertidumbre - Ejemplo



Determinación del área de un rectángulo

Ley de propagación de la Incertidumbre - Correlación

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right)$$

Componentes x_i dependientes

Magnitudes de entrada correladas

$$u_c^2\left(y\right) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot u^2\left(x_i\right) + 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot u\left(x_i, x_j\right)$$

Covarianza

Varianza típica combinada

Coeficientes de sensibilidad

Incertidumbre típica

Coeficientes de sensibilidad

Ley de propagación de la Incertidumbre - Correlación

- La covarianza de dos variables aleatorias es una medida de su dependencia mutua. La covarianza cov(x,y) puede estimarse mediante s(x_i,y_i) obtenida a partir de n pares independientes de observaciones simultáneas x_i e y_i de x e y, como:

$$s(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\cdot(y_i - \overline{y})$$

- La covarianza estimada de las dos medias x e y , viene dada por:

$$u(x,y) = s(\overline{x},\overline{y}) = \frac{s(x,y)}{n}$$

Ley de propagación de la Incertidumbre - Correlación

- Cuando las magnitudes de entrada están correlacionadas, y x_i y x_j son las estimaciones de X_i y X_j, y $u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$ es la covarianza estimada asociada a x_i y x_j. El grado de correlación entre x_i y x_j viene dado por el coeficiente de correlación estimado como:

$$r(x,y) = \frac{u(x,y)}{u(x)\cdot u(y)}$$

- donde $r(x,y) = r(y,x)$ y $-1 \leq r(x,y) \leq +1$. Si las estimaciones de x e y son independientes, $r(x,y) = 0$, y una variación en una de las dos no implica una variación en la otra
- Pero, que su covarianza y su coeficiente de correlación sean nulos, no implica que sean independientes

Ley de propagación de la Incertidumbre - Correlación

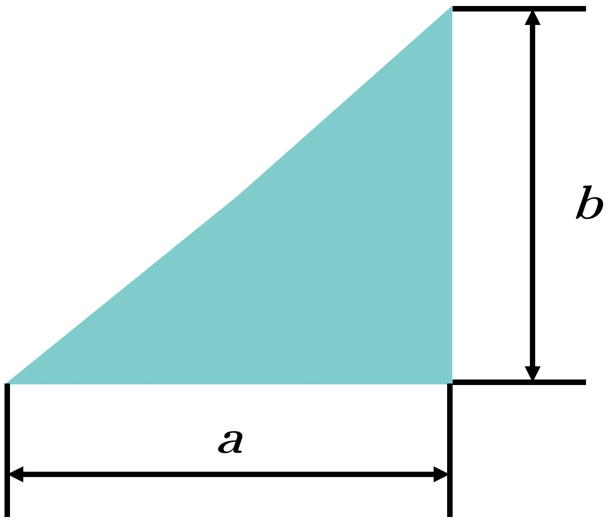
- La covarianza asociada a los estimados de dos magnitudes de entrada, X_i y X_j puede considerarse igual a cero o insignificante en cualquiera de los siguientes casos:
  - Las magnitudes de entrada X_i y X_j son independientes; por ejemplo, cuando se han observado reiterada, pero no simultáneamente, en diferentes experimentos independientes, o cuando representan magnitudes resultantes de diferentes evaluaciones que se han realizado de forma independiente,
  - Cualquiera de las magnitudes de entrada X_i y X_j puede tratarse como constante,
  - No existe información suficiente para valorar la existencia de una correlación entre las magnitudes de entrada X_i y X_j .

Ley de propagación de la Incertidumbre - Correlación

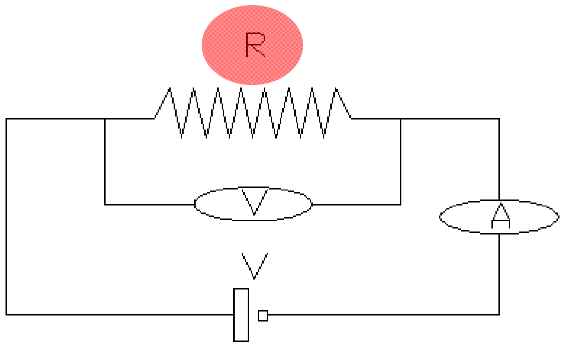
- Puede existir una correlación significativa entre dos magnitudes de entrada si se utiliza, para su determinación:
  - El mismo instrumento de medida,
  - El mismo patrón,
  - El mismo método de medida.
  - La misma referencia con incertidumbre típica significativa

Ley de propagación de la Incertidumbre - Ejemplo

Determinación del área de un rectángulo



Ley de propagación de la Incertidumbre - Ejemplo



Determinación del valor de la resistencia

Concepto de Incertidumbre Expandida

- Aunque $u_c(y)$ puede ser utilizada universalmente para expresar la incertidumbre de un resultado de medida, frecuentemente es necesario, en ciertas aplicaciones comerciales, industriales o reglamentarias, o en los campos de la salud o la seguridad, dar una medida de la incertidumbre que defina, alrededor del resultado de medida, un intervalo en el interior del cual pueda esperarse encontrar gran parte de la distribución de valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando.

- La nueva expresión de la incertidumbre, que satisface la anterior exigencia, se denomina incertidumbre expandida, y se representa por $\boldsymbol{U}$.

Concepto de Incertidumbre Expandida

- La incertidumbre expandida U se obtiene multiplicando la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ por un factor de cobertura k:

$$U = k \cdot u_c\left(y\right)$$

- La utilización de intervalos de incertidumbre con una probabilidad de cobertura aproximadamente igual es esencial para comparar los resultados de diferentes mediciones como, por ejemplo:
    - Cuando se evalúan los resultados de una comparación entre laboratorios,
    - Cuando se comprueba el cumplimiento de una especificación o,
    - Cuando se establecen las incertidumbres del alcance de acreditación de un laboratorio de calibración.

Concepto de Incertidumbre Expandida

- Resultado de una medición:

$$Y = y \pm U\left(y\right)$$

- Lo que se interpreta como:
  - La mejor estimación del valor atribuible al mensurando Y es y.
  - Puede esperarse que en el intervalo que va de $y\!-\!U$ a $y\!+\!U$ esté comprendida una fracción importante de la distribución de valores que podrían ser razonablemente atribuidos a Y.
  - Tal intervalo puede también expresarse por $y\!-\!U \leq Y \leq y\!-\!U$

Concepto de Incertidumbre Expandida

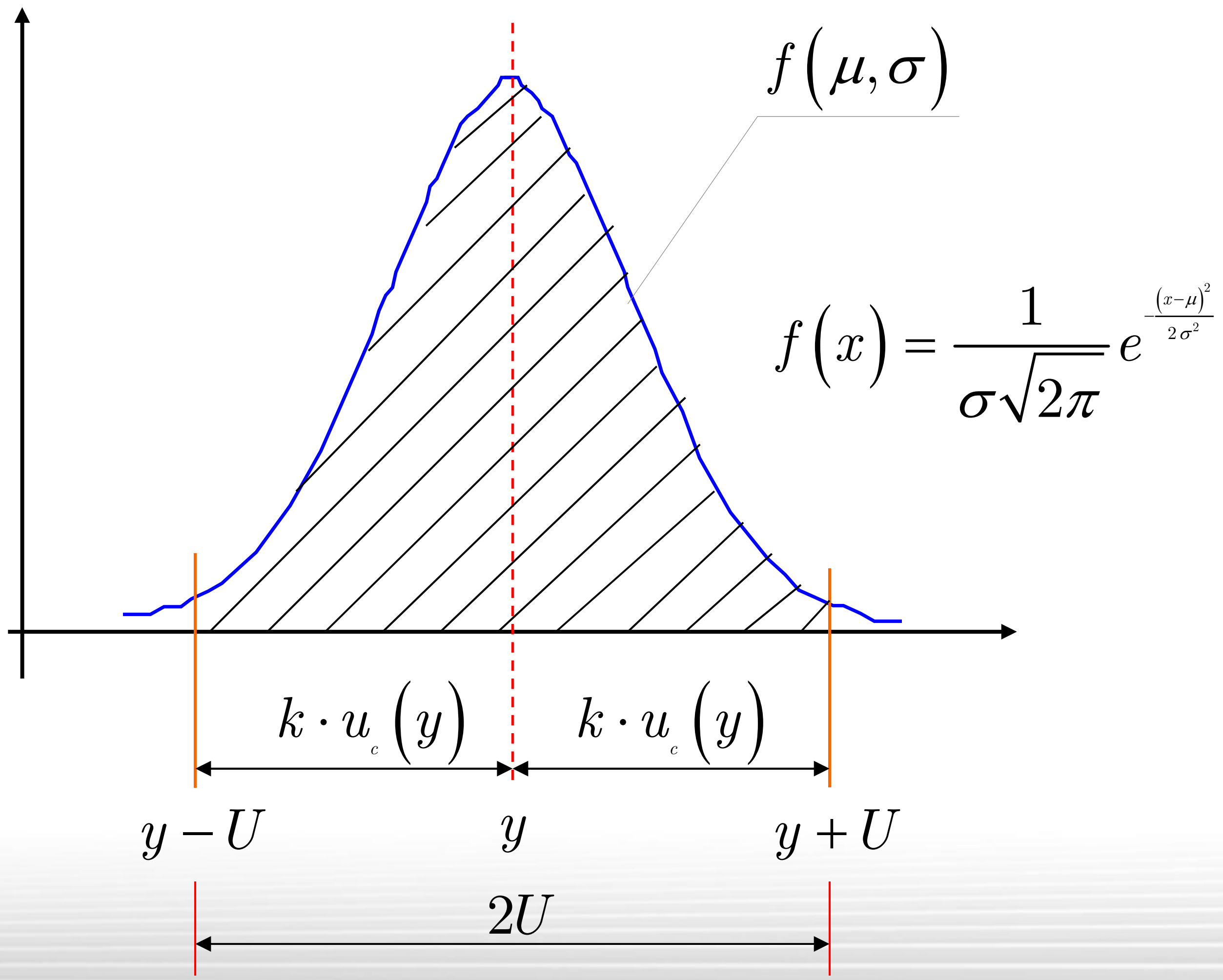
- U define, alrededor del resultado de medición y, un intervalo que comprende una fracción elevada p de la distribución de probabilidad representada por este resultado y su incertidumbre típica combinada, siendo p la probabilidad o nivel de confianza del intervalo.

- Siempre que sea posible, debe estimarse e indicarse el nivel de confianza p asociado al intervalo definido por U.

- El valor del factor de cobertura k se elige en función del nivel de confianza requerido para el intervalo $y - U$ a $y + U$.

- En general, k toma un valor entre 2 y 3. No obstante, en aplicaciones especiales, k puede tomarse fuera de dicho margen de valores.

Concepto de Incertidumbre Expandida

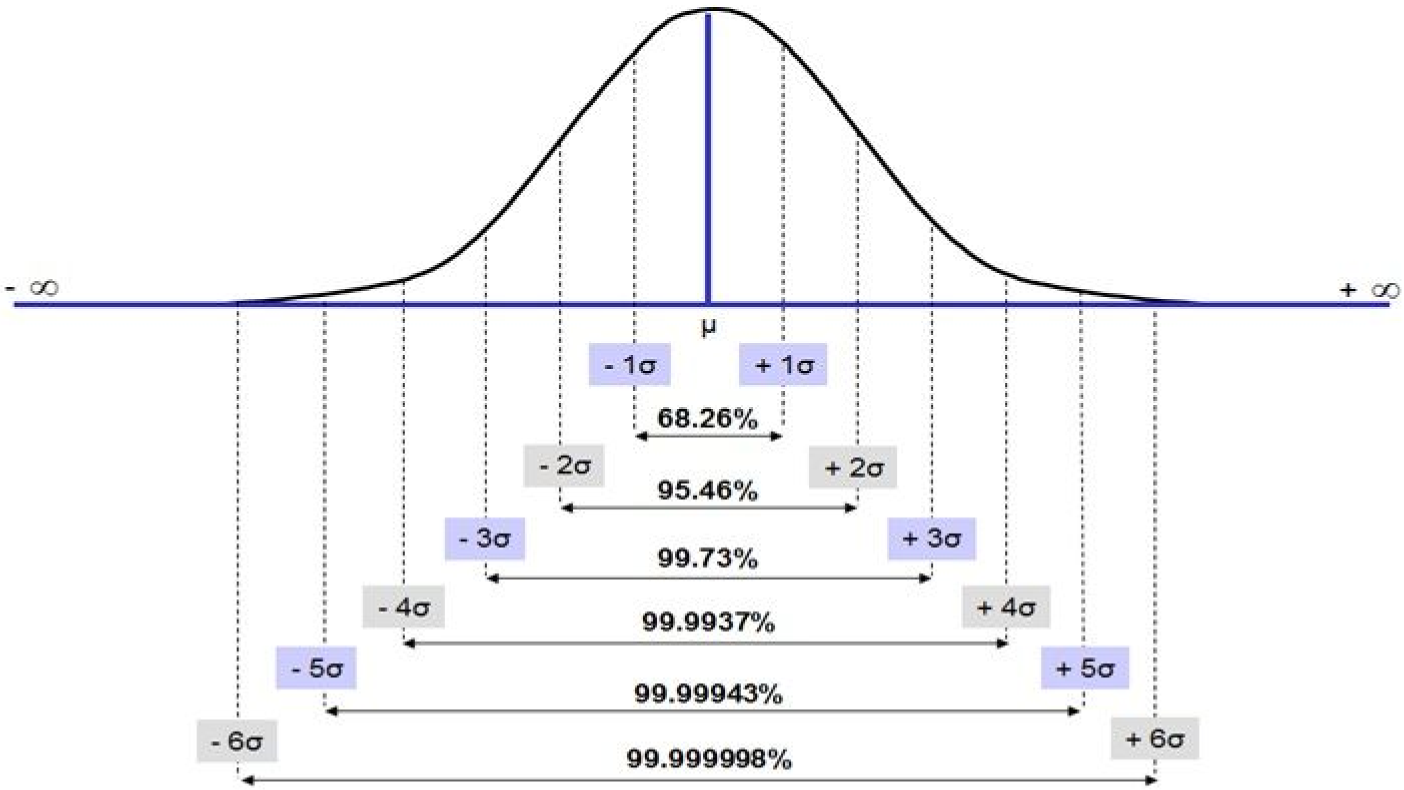


Concepto de Incertidumbre Expandida

- Idealmente, debería poderse escoger un valor específico del factor de cobertura k que proporcionase un intervalo $Y = y \pm U = y \pm ku_c(y)$ correspondiente a un nivel de confianza particular p, por ejemplo, un 95 o un 99 por ciento.

- De forma equivalente, para un valor dado de k, debería ser posible enunciar de forma inequívoca el nivel de confianza asociado a dicho intervalo. Sin embargo, no es fácil lograr esto en la práctica puesto que se requiere un conocimiento amplio de la distribución de probabilidad caracterizada por el resultado de medida y, y su incertidumbre típica combinada $u_c(y)$.

Concepto de Incertidumbre Expandida



Concepto de Incertidumbre Expandida

- El factor de cobertura se determina en función de la probabilidad de cobertura (nivel de confianza) deseada

Nivel de confianza p (en porcentaje)	Factor de cobertura *k*
68,27	**1**
90	**1,645**
95	**1,960**
95,45	**2**
99	**2,576**
99,73	**3**

Factor de cobertura *k* que proporciona un intervalo correspondiente a un nivel de confianza *p*, suponiendo una distribución normal.

Teorema del Límite Central

- Si $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_NX_N$, y todas las X_i vienen caracterizadas por distribuciones normales, la distribución de Y, resultante de la convolución, también es normal.
- No obstante, aunque las distribuciones de X_i no sean normales, es posible suponer una distribución normal para Y, teniendo en cuenta el Teorema del Límite Central.
- Este teorema establece que la distribución de Y será aproximadamente normal, con esperanza matemática $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i E(X_i)$ y varianza $\boldsymbol{\sigma}^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \boldsymbol{\sigma}^2(X_i)$ donde $E(X_i)$ es la esperanza matemática de X_i y $\sigma_2\ (X_i)$ es la varianza de X_i, siempre que las X_i sean independientes y $\sigma_2(Y)$ sea mucho mayor que cualquier otra componente $c_i^2 \boldsymbol{\sigma}^2(X_i)$ de una X_i cuya distribución no sea normal.

Teorema del Límite Central

- Una consecuencia práctica del Teorema del Límite Central es que siempre que pueda demostrarse **que se cumplen aproximadamente las hipótesis** para su validez, en particular que la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ **no dominada** por una componente de incertidumbre típica obtenida por una evaluación **Tipo A basada en unas pocas observaciones**, o por una componente de incertidumbre típica obtenida por evaluación **Tipo B basada en una distribución rectangular**, una primera aproximación razonable para el cálculo de una incertidumbre expandida $U= ku_c(y)$ que proporcione un intervalo con nivel de confianza p, es utilizar para k un valor tomado de la distribución normal.

Distribución del resultado

- **Asimilable a una normal (Con estimación de la incertidumbre típica suficientemente fiable)**

  - Si la variable que representa el resultado se obtiene a través de varios componentes de la incertidumbre ($n \geq 3$), derivados de distribuciones de probabilidad bien definidas de magnitudes independientes (por ejemplo, distribuciones normales o rectangulares),

  - Si realizan contribuciones comparables a la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida.

  - Entonces, **se cumplen las condiciones del Teorema del Límite Central** y puede suponerse, con un elevado grado de aproximación, que la **distribución** de la estimación de **salida** es **normal**.

Distribución del resultado

- **Asimilable a una normal (Con estimación de la incertidumbre típica suficientemente fiable)**

La fiabilidad de la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida se determina por sus grados efectivos de libertad

La fiabilidad de u(y) se considera suficiente:

- Si ninguna de las contribuciones **tipo A** empleadas en la determinación de u(y) se ha efectuado con menos de diez valores.
- Las estimaciones **tipo B son seguras**.

Si se dan las dos condiciones anteriores [normalidad y fiabilidad de u(y)], debe utilizarse k=2 para una incertidumbre expandida correspondiente a una probabilidad de cobertura del 95 %, aproximadamente.

Distribución del resultado

- **Asimilable a una normal (Con estimación de la incertidumbre típica no suficientemente fiable)**

  Las estimaciones tipo A se consideran con sus grados de libertad ($\nu = n\text{-}1$ en modelos sencillos)

  Las estimaciones tipo B se admiten como muy seguras por lo que $\nu = \infty$

  Se recomienda la fórmula de *Welch-Satterthwaite* para combinar los grados de libertad de cada variable y obtener el número de grados de libertad efectivos, ν_{ef}.

$$\upsilon_{ef} = \frac{u_c^{\,4}(y)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(c_i \cdot u(x_i)\right)^4}{\upsilon_i}} = \frac{u_c^{\,4}(y)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i(y)^4}{\upsilon_i}}$$

Determinación de los grados efectivos de libertad

Grados de libertad	Fracción p (%)					
ν	68,27 [a)]	90	95	95,45 [a)]	99	99,73 [a)]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59

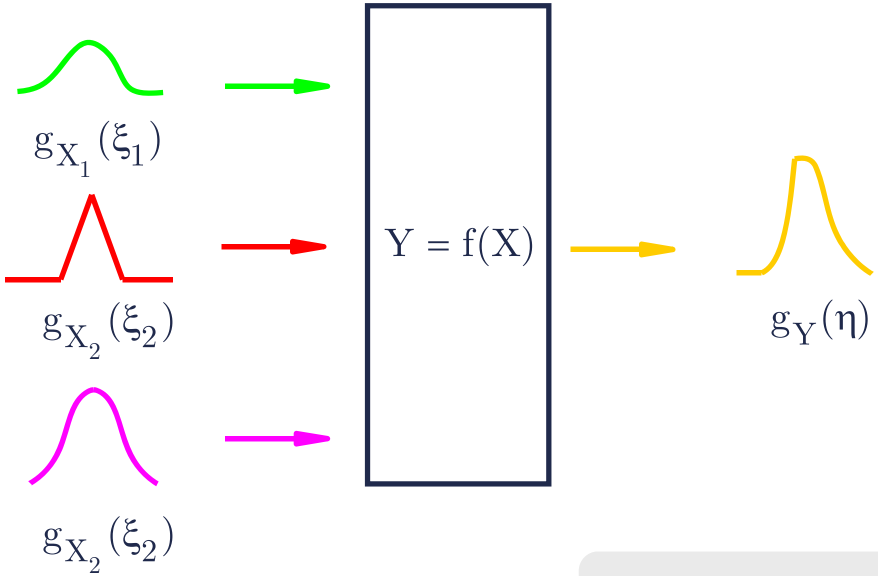
Determinación de los grados efectivos de libertad

Grados de libertad	Fracción p (%)					
ν	68,27 [a)]	90	95	95,45 [a)]	99	99,73 [a)]
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

a) Para una magnitud z descrita por una distribución normal de esperanza matemática μ_z y desviación típica σ, el intervalo $\mu_z \pm k\sigma$ comprende respectivamente las fracciones p = 68,27 %; 95,45 % y 99,73 % de la distribución, para los valores k = 1, 2 y 3.

Distribución del resultado

- **No asimilable a una normal**



Método de Monte Carlo

Forma de expresar los resultados

Magnitud de entrada x_i	Valor de la magnitude de entrada	Incertidumbre típica $u(x_i)$	Distribución de probabilidad	Coeficiente de sensibilidad c_i	Contribución a la incertidumbre $u_i(y)$	Grados de libertad u_i
x_1						
x_2						
.						
.						
x_n						
y						

Forma de expresare la incertidumbre

$$U = k \cdot u_c(y)$$

- Se ha de indicar sin signo
- Redondeo de U por exceso. Proporciona mayor seguridad.
- Redondeo por defecto, siempre y cuando no reduzca el valor numérico de la incertidumbre de medición en más de un 5%.

Forma de expresare la incertidumbre

$$U = k \cdot u_c\left(y\right)$$

- El valor numérico de la incertidumbre de medida debe expresarse, como máximo, con dos cifras significativas.

- En general, el valor numérico del resultado de la medición debe redondearse en su expresión final a la menor cifra significativa en el valor de la incertidumbre expandida asignada al resultado de la medición.

Ejemplo

$$E_x = \overline{l}_x - l_s + L_s \, \bar{\alpha} \cdot \Delta t + \delta l_x + \delta l_M$$

Magnitud de entrada x_i	Valor de la magnitude de entrada	Incertidumbre típica $u(x_i)$	Distribución de probabilidad	Coeficiente de sensibilidad c_i	Contribución a la incertidumbre $u_i(y)$	Grados de libertad υ_i
l_x	85,05 mm	10,541 µm	A. Normal	1 [-]	10,541 µm	9
l_s	84,99971 mm	0,7125 µm	A. Normal	-1 [-]	-0,712 µm	∞
At	0 K	1,155 K	B. Rectangular	0,9775 mm·K^{-1}	1,129 µm	∞
δl_x	0 mm	14,434 µm	B. Rectangular	1 [-]	14,434 µm	∞
δl_M	0 mm	4,082 µm	A. Triangular	1 [-]	4,082 µm	∞
E_x	50,29 µm				18,382 µm	

Ejemplo

$$E_x = \bar{l}_x - l_s + L_s \, \bar{\alpha} \cdot \Delta t + \delta l_x + \delta l_M$$

$$\upsilon_{ef} = \frac{u_c^{\,4}(y)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(c_i \cdot u(x_i)\right)^4}{\upsilon_i}} = \frac{18{,}382^4}{\frac{10{,}541^4}{9} + \frac{0{,}712^4}{\infty} + \frac{1{,}129^4}{\infty} + \frac{14{,}434^4}{\infty} + \frac{4{,}082^4}{\infty}} = 83{,}231$$

$$\upsilon_{ef} = 50 \quad \Rightarrow \quad k_{95} = 2{,}05$$

$$U = 2{,}05 \cdot 18{,}382 = 37{,}68\ \mu\text{m}$$

$$E_x = (50 \pm 38)\ \mu\text{m}$$

Resumen - Procedimiento de evaluación y expresión de la incertidumbre

1. Expresar matemáticamente la relación existente entre el mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las que depende Y según $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$. La función f debe contener todas las magnitudes, incluyendo todas las correcciones y factores de corrección que pueden contribuir significativamente a la incertidumbre del resultado de medición.

2. Determinar x_i, el valor estimado de la magnitud de entrada X_i, bien a partir del análisis estadístico de una serie de observaciones, bien por otros métodos.

Resumen - Procedimiento de evaluación y expresión de la incertidumbre

3. Evaluar la incertidumbre típica $u(x_i)$ de cada estimación de entrada x_i.

   Para una estimación de entrada obtenida por análisis estadístico de series de observaciones, evaluación Tipo A de la incertidumbre típica.

   Para una estimación de entrada obtenida por otros medios, evaluación Tipo B de la incertidumbre típica.

4. Evaluar las covarianzas asociadas a todas las estimaciones de entrada que estén correladas.

5. Calcular el resultado de medición; esto es, la estimación y del mensurando Y, a partir de la relación funcional f utilizando para las magnitudes de entrada X_i las estimaciones x_i obtenidas en el paso 2.

Resumen - Procedimiento de evaluación y expresión de la incertidumbre

6. Determinar la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ del resultado de medida y, a partir de las incertidumbres típicas y covarianzas asociadas a las estimaciones de entrada.

   Si la medición determina simultáneamente más de una magnitud de salida, calcular sus covarianzas.

7. Si es necesario dar una incertidumbre expandida U, cuyo fin es proporcionar un intervalo $[y - U, y + U]$ en el que pueda esperarse encontrar la mayor parte de la distribución de valores que podrían, razonablemente, ser atribuidos al mensurando Y, multiplicar la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ por un factor de cobertura k, para obtener $U = k\, u_c(y)$.

   Seleccionar k considerando el nivel de confianza requerido para el intervalo.

Universidad Politécnica de Madrid
E.T.S. de Ingeniería y Diseño Industrial

Curso de cálculo de incertidumbres en ensayos: TEORÍA

EILA17 Cálculo de Incertidumbres

Jesús Caja García (jesus.caja@upm.es)
Piera Maresca (piera.maresca@upm.es)
Dpto. de Ingeniería, Química y Diseño Industrial